

MULTIDISCIPLINARY MODELING OF ORBITAL COLLISION PROBABILITY: INTEGRATION BETWEEN DYNAMICS AND STATISTICS

MODELAGEM MULTIDISCIPLINAR DA PROBABILIDADE DE COLISÃO ORBITAL: INTEGRAÇÃO ENTRE DINÂMICA E ESTATÍSTICA

DOI: 10.51859/amplla.sset.41262-3

Dimitrie Hristov Sobrinho ¹
Jorge Kennety Silva Formiga ²
Denilson Paulo Souza dos Santos ³

¹ Departamento de Engenharia Aeronáutica – FESJ, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São João da Boa Vista, SP, Brasil.

² Departamento de Engenharia Ambiental – ICT, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José dos Campos, SP, Brasil.

³ Departamento de Engenharia Aeronáutica – FESJ, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São João da Boa Vista, SP, Brasil.

ABSTRACT

The rapid growth of the population of objects in low Earth orbit (LEO) underscores the need for robust metrics to assess collision risk. Traditional methods, such as Foster's Gaussian formulations and the analytical extension by Akella and Alfriend, offer high computational efficiency but may be limited in post-fragmentation scenarios, where the debris distribution is anisotropic and non-Gaussian. On the other hand, dynamic models based on patched conics, such as the one proposed by Formiga et al., physically describe the cloud's evolution but do not directly provide operational probabilistic measures. In this work, we propose a hybrid dynamic-statistical model that connects the physical evolution of the cloud to the probabilistic calculation of collisions. Uncertainties are obtained from the dynamic propagation of a set of fragments, subsequently represented by three-dimensional covariance matrices and projected onto the conjunction plane, allowing the application of the Foster/Akella integral without imposing a priori Gaussian assumptions. Thus, the statistics used in the Pc calculation emerge from the orbital dynamics themselves, increasing the physical consistency and reliability of the estimates in high-uncertainty scenarios. Finally, a computational implementation in MATLAB is presented, detailing the numerical workflow and potential application in operational space surveillance systems.

Keywords: Space Debris, Collision Probability, Patching Conics, Foster Integral, MATLAB.

RESUMO

O crescimento acelerado da população de objetos em órbita terrestre baixa (LEO) intensifica a necessidade de métricas robustas para avaliação do risco de colisão. Métodos tradicionais, como as formulações gaussianas de Foster e a extensão analítica de Akella e Alfriend, apresentam elevada eficiência computacional, porém podem ser limitados em cenários pós-fragmentação, nos quais a distribuição de detritos é anisotrópica e não gaussiana. Por outro lado, modelos dinâmicos baseados em cônicas remendadas, como o proposto por Formiga et al., descrevem fisicamente a evolução da nuvem, mas não fornecem diretamente medidas probabilísticas operacionais. Neste trabalho, propõe-se um modelo híbrido dinâmico-estatístico que conecta a evolução física da nuvem ao cálculo probabilístico de colisão. As incertezas são obtidas a partir da propagação dinâmica de um conjunto de fragmentos, sendo posteriormente representadas por matrizes de covariância tridimensionais e projetadas no plano de conjunction, permitindo a aplicação da integral de Foster/Akella sem a imposição de hipóteses gaussianas a priori. Dessa forma, as estatísticas utilizadas no cálculo de Pc emerge da própria dinâmica orbital, aumentando a consistência física e a confiabilidade das estimativas em cenários de alta incerteza. Por fim, apresenta-se uma implementação computacional em MATLAB, com detalhamento do fluxo numérico e potencial aplicação em sistemas operacionais de vigilância espacial.

Palavras-chave: Detritos Espaciais, Probabilidade de Colisão, Cônicas Remendadas, Integral de Foster, MATLAB.

1 INTRODUÇÃO

O crescente uso do ambiente orbital terrestre tem intensificado as preocupações relacionadas à segurança de missões espaciais e à integridade de satélites ativos. A expansão de mega constelações, plataformas comerciais e eventos de fragmentação decorrentes de colisões ou explosões tem contribuído para um cenário de crescente congestionamento orbital. Estimativas recentes da ESA indicam a existência de mais de 360 milhões de objetos com diâmetro superior a 1 mm orbitando a Terra [1], muitos dos quais não são detectáveis, mas possuem potencial para causar danos críticos a espaçonaves operacionais. Formulações clássicas de densidade espacial orbital e evolução de nuvens de detritos estabeleceram as bases para a avaliação do risco de colisão. Descrições probabilísticas iniciais foram propostas por [2], enquanto a relação entre densidade espacial e movimento orbital foi formalizada por [3]. Estudos subsequentes demonstraram que a estrutura de nuvens de detritos emerge naturalmente da dinâmica orbital [4–6], reforçando a necessidade de modelos fisicamente consistentes para análise de risco.

No contexto operacional, a avaliação da probabilidade de colisão é tradicionalmente realizada por métodos probabilísticos baseados em hipóteses gaussianas no plano de conjunção. Dentre os mais utilizados destacam-se a formulação proposta por [7] e sua extensão analítica por [8]. Esses modelos apresentam elevada eficiência computacional e são amplamente empregados em sistemas de monitoramento de conjunções. Entretanto, sua eficácia depende de simplificações como o movimento relativo retilíneo e a suposição de distribuições de incerteza simétricas, que podem ser inadequadas em cenários pós-fragmentação, caracterizados por forte anisotropia e comportamento não gaussiano [9].

Em contraste, modelos baseados na descrição física da evolução de nuvens de detritos têm recebido crescente atenção. A abordagem proposta por [10], baseada no método das cônicas remendadas, permite representar trajetórias keplerianas independentes e capturar efeitos de densidade não uniforme ao longo da órbita. Estudos complementares, como [11], destacam a importância de mapeamentos dinâmicos para a identificação de regiões críticas de concentração de fragmentos, enquanto avanços recentes indicam que a incorporação de dispersão orbital realista melhora a confiabilidade das estimativas de risco de colisão [12].

Esse cenário evidencia que a separação entre abordagens físicas e estatísticas limita a precisão das estimativas de colisão em ambientes orbitais cada vez mais complexos. Assim, a literatura contemporânea e diretrizes técnicas de agências como NASA e ESA [1, 13] destacam a necessidade de integrar incertezas derivadas dinamicamente às formulações probabilísticas no plano de conjunção. Motivado por esse contexto, este trabalho apresenta a formulação, análise e implementação de um modelo híbrido de probabilidade de colisão, implementado em MATLAB, que combina a dinâmica orbital proposta por [10] com o arcabouço probabilístico desenvolvido por [7] e [8]. A abordagem proposta deriva a estrutura de covariância diretamente da propagação física de uma nuvem de detritos e a incorpora ao cálculo estatístico realizado no plano de conjunção.

Nessa formulação, a representação gaussiana requerida pelos métodos probabilísticos clássicos não é imposta a priori, sendo introduzida como uma aproximação local da distribuição propagada. Essa estratégia preserva a eficiência computacional dos métodos estabelecidos, ao mesmo tempo em que aumenta sua consistência física em cenários pós-fragmentação. Estudos recentes indicam que abordagens híbridas dessa natureza podem reduzir vieses estatísticos, aprimorar a tomada de decisão operacional e contribuir para a evolução dos sistemas de vigilância espacial [12, 14].

2 FUNDAMENTOS DINÂMICOS-ESTATÍSTICOS PARA PROBABILIDADE DE COLISÃO

A caracterização do risco de colisão em ambiente orbital exige a integração entre a descrição física da dinâmica de fragmentos e a modelagem probabilística de encontros orbitais. Após eventos de fragmentação, os detritos se distribuem ao longo de suas órbitas de acordo com leis determinísticas da mecânica celeste, o que impacta diretamente a estimativa de probabilidade de colisão. Nesse contexto, o modelo proposto por Formiga et al. [10] descreve a evolução de nuvens de detritos por meio do método das cônicas remendadas, no qual cada fragmento é tratado como um corpo independente sob ação gravitacional central.

A dinâmica orbital de cada fragmento é governada pela relação kepleriana

$$r(\theta) = \frac{a_i(1 - e_i^2)}{(1 + e_i \cos \theta)} \quad (1)$$

evidenciando que a distribuição espacial dos detritos não é uniforme, mas determinada diretamente pelos parâmetros orbitais iniciais. A densidade espacial associada pode ser expressa por

$$n_i(r) = \frac{3r^2}{2a_i^3(3e_i + e_i^3)} \quad (2)$$

indicando maior concentração de fragmentos em regiões onde a velocidade orbital é reduzida. Esse comportamento é consistente com formulações clássicas de densidade orbital [2] e com estudos sobre evolução de nuvens de detritos [3]. Assim, a distribuição tridimensional emerge naturalmente da dinâmica, sem a imposição de hipóteses estatísticas a priori.

Do ponto de vista operacional, a probabilidade de colisão é tradicionalmente avaliada por modelos baseados no ponto de máxima aproximação (CPA), conforme as formulações de Foster [7] e Akella e Alfriend [8]. Nesses modelos, as posições dos objetos são tratadas como variáveis aleatórias sujeitas a incertezas

$$\tilde{r}_s = \bar{r}_{s0} + e_s \quad \tilde{r}_d = \bar{r}_{d0} + e_d \quad (3)$$

resultando em um vetor relativo

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{r}_d(t) - \tilde{r}_s(t) = \tilde{\rho}_0 + v_r t \quad (4)$$

No instante de máxima aproximação, a condição $\tilde{\rho}_0 \cdot v_r = 0$ define o plano de conjunção, no qual a incerteza relevante está concentrada. A projeção da covariância tridimensional nesse plano resulta em

$$P^* = T \begin{bmatrix} P_s & 0 \\ 0 & P_d \end{bmatrix} T^t \quad (5)$$

permitindo a formulação da probabilidade de colisão como uma integral bidimensional sobre um domínio circular de raio R

$$P_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{|P^*|}} \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{r}^* - \bar{r}_0^*)^t (P^*)^{-1} (\tilde{r}^* - \bar{r}_0^*)\right) dz dy \quad (6)$$

Apesar de sua ampla utilização, essa abordagem baseia-se em aproximações gaussianas locais que podem ser inadequadas em cenários de fragmentação, nos quais a distribuição espacial apresenta anisotropias significativas [11]. Nesse contexto, a integração entre modelos dinâmicos e estatísticos surge como uma alternativa para aumentar a consistência física das estimativas.

Assim, as distribuições orbitais obtidas por propagação dinâmica podem ser reinterpretadas como fontes de informação estatística, permitindo a construção de

matrizes de covariância diretamente a partir da dispersão física dos fragmentos. Esse procedimento estabelece um elo entre mecânica orbital e inferência probabilística, no qual a estrutura estatística não é imposta, mas derivada da dinâmica subjacente, constituindo a base para modelos híbridos de probabilidade de colisão.

3 TRABALHOS RELACIONADOS E AVANÇOS RECENTES (2020–2025)

Estudos recentes têm estendido as formulações clássicas de dinâmica de nuvens de detritos e probabilidade de colisão, motivados por limitações tanto nos modelos determinísticos pós-fragmentação quanto nas abordagens estatísticas baseadas em hipóteses gaussianas no plano de conjunção. Em particular, a necessidade de incorporar distribuições não gaussianas, anisotropias espaciais e efeitos não lineares na propagação de incertezas tem impulsionado avanços metodológicos. O aumento da população de detritos em LEO, intensificado por eventos de fragmentação em larga escala, como o caso Fengyun-1C, reforça a necessidade de abordagens híbridas fisicamente consistentes [15–17].

Nesse contexto, [18] propuseram uma extensão não gaussiana da probabilidade de colisão baseada em projeções adaptativas, reduzindo distorções associadas aos modelos clássicos de Foster/Akella. De forma complementar, abordagens de Monte Carlo de alta fidelidade, como as de [12, 19], demonstram que a avaliação estocástica direta no plano de conjunção permite capturar desvios associados a regiões com alta concentração de detritos, não representados adequadamente por aproximações gaussianas.

Adicionalmente, [14] introduziram técnicas de amostragem por importância voltadas à avaliação de eventos de baixa probabilidade, aumentando a estabilidade numérica e a eficiência computacional em cenários operacionais críticos, como missões tripuladas e mega constelações.

Do ponto de vista institucional, tais avanços já se refletem em diretrizes internacionais. Relatórios da ESA destacam a crescente adoção de métodos híbridos que combinam propagação física e modelagem probabilística [1], enquanto documentos da NASA indicam a necessidade de complementar métricas baseadas em P_C com critérios fisicamente fundamentados [13], em consonância com as análises críticas de [9].

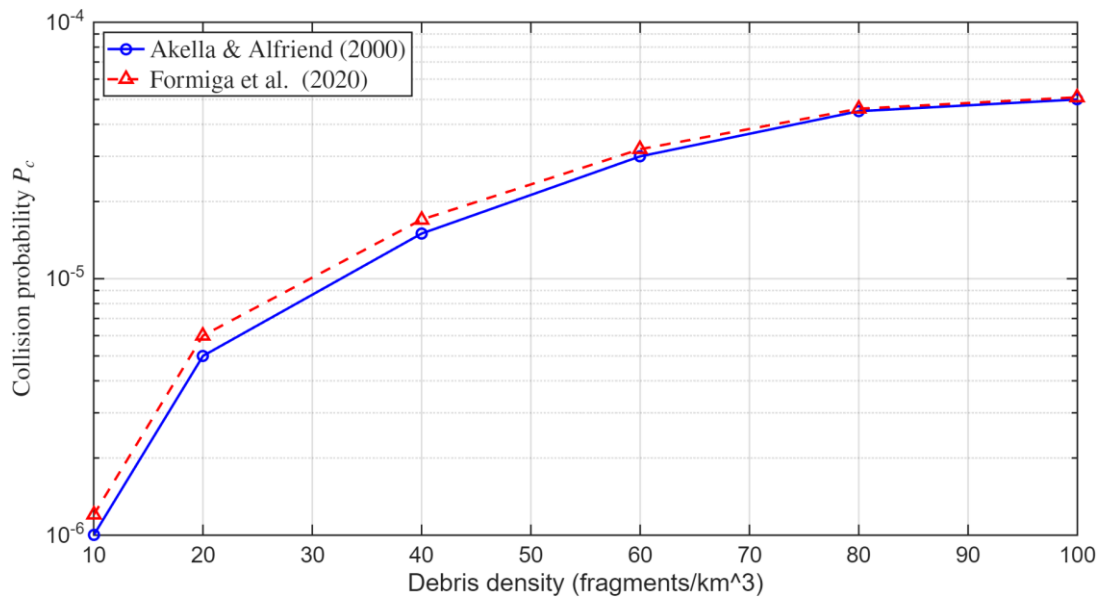


Figura 1 – Comparação esquemática entre a abordagem probabilística tradicional (Foster/Akella) e o modelo híbrido com derivação física das incertezas (HCPM).

Esses desenvolvimentos não substituem os modelos clássicos de [7, 8], mas os estendem por meio da integração entre dinâmica orbital e inferência estatística, consolidando abordagens híbridas como evolução natural para a avaliação do risco de colisão em ambientes orbitais complexos [10].

4 MODELO HÍBRIDO DE PROBABILIDADE DE COLISÃO (HCPM)

O Modelo Híbrido de Probabilidade de Colisão (HCPM) consiste na integração entre a modelagem dinâmica da evolução de nuvens de detritos e o cálculo probabilístico de colisão no plano de conjunção. A abordagem combina a propagação orbital baseada no modelo de Formiga et al.[10] com a formulação estatística de Foster [7] e Akella e Alfriend [8], permitindo a construção de medidas probabilísticas a partir de distribuições fisicamente consistentes.

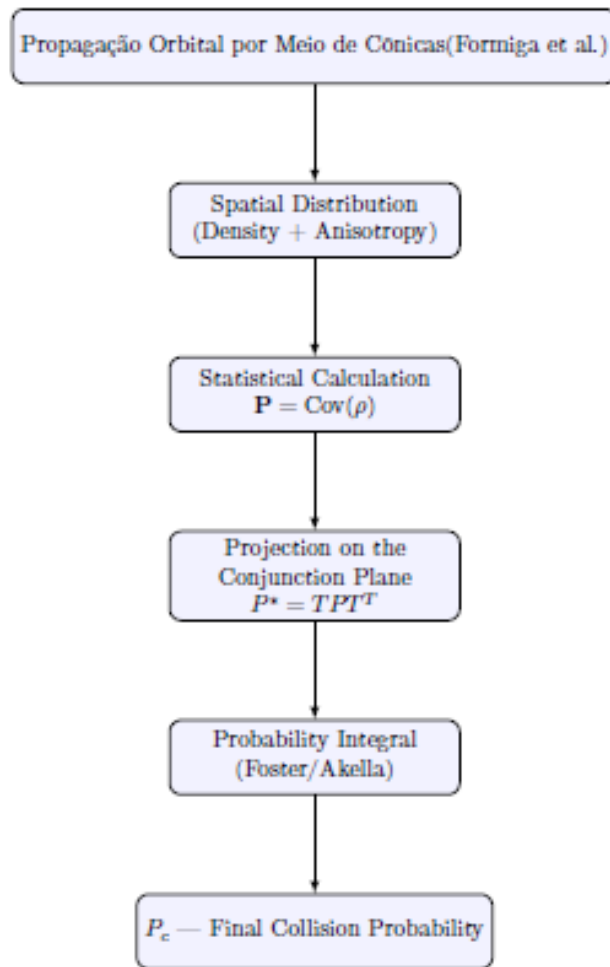


Figura 2 – Estrutura Físico-Estatística do Modelo Híbrido de Probabilidade de Colisão (HCPM).

A distribuição espacial dos fragmentos é obtida por propagação determinística, sendo descrita por

$$n_i(r) = \frac{3r^2}{2a_i^3(3e_i + e_i^3)} \quad (7)$$

o que reflete a concentração de detritos em regiões de menor velocidade orbital. O conjunto de fragmentos propagados $\bar{\rho} = (x, y, z)$ permite a obtenção direta dos momentos estatísticos:

$$\bar{\rho} = \mathbb{E}[\rho], \quad P = \text{Cov}(\rho) \quad (8)$$

nos quais \mathbf{P} representa a dispersão anisotrópica da nuvem. Diferentemente de abordagens clássicas, essa covariância não é assumida, mas derivada da dinâmica orbital.

No instante de máxima aproximação, a incerteza relevante é projetada no plano de conjunção, ortogonal à velocidade relativa, resultando em

$$P^* = TPT^t \quad (9)$$

e na posição média projetada

$$\bar{r}_0^* = T\bar{\rho} \quad (10)$$

Essa projeção preserva a estrutura anisotrópica da distribuição original, evitando distorções associadas a aproximações isotrópicas [11].

A probabilidade de colisão é então calculada pela integração da densidade no domínio físico de colisão \mathcal{D} .

$$P_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{|P^*|}} \iint_{\mathcal{D}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{r}^* - \bar{r}_0^*)^t (P^*)^{-1}(\tilde{r}^* - \bar{r}_0^*)\right] dA \quad (11)$$

Nesse contexto, a distribuição probabilística não é imposta a priori, mas emerge da dinâmica dos fragmentos, sendo a hipótese gaussiana utilizada apenas como aproximação local no plano de conjunção. Essa integração reduz inconsistências associadas a modelos puramente estatísticos e melhora a representatividade física em cenários pós-fragmentação.

O HCPM mantém compatibilidade com procedimentos operacionais existentes, ao mesmo tempo em que incorpora informações dinâmicas diretamente no cálculo probabilístico, resultando em estimativas mais consistentes em ambientes altamente anisotrópicos. Dessa forma, o modelo estabelece um vínculo direto entre mecânica orbital e inferência estatística, constituindo uma abordagem robusta para avaliação de risco em cenários modernos de tráfego espacial.

5 METODOLOGIA

A metodologia consiste na construção da probabilidade de colisão a partir da propagação dinâmica de uma nuvem de detritos e sua posterior representação estatística no plano de conjunção.

A nuvem é modelada como um conjunto de N fragmentos, cujas posições são obtidas por propagação kepleriana a partir de condições iniciais perturbadas:

$$r_i(t) = \mathcal{K}(r_i, 0, t), \quad (12)$$

onde $\mathcal{K}(\cdot)$ representa o operador de propagação orbital. A distribuição resultante é naturalmente anisotrópica, refletindo a dinâmica orbital dos fragmentos.

A caracterização estatística da nuvem é realizada a partir do conjunto $\{r_i\}_{i=1}^N$ definindo-se a posição média

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (13)$$

e a matriz de covariância

$$\mathbf{P} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})(r_i - \bar{r})^T \quad (14)$$

Essa análise é realizada no referencial centrado na média com $\rho_i = r_i - \bar{r}$ sendo a distribuição tridimensional projetada no plano de conjunção. A covariância projetada \mathbf{P}^* é então utilizada como aproximação local da dispersão.

A probabilidade de colisão é calculada por meio da formulação analítica de Foster [7], com refinamento de Akella e Alfriend [8], assumindo uma aproximação gaussiana local no plano:

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\mathbf{P}^*|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^T \mathbf{P}^{*-1} \rho\right) \quad (15)$$

A probabilidade de colisão é obtida pela integração dessa densidade sobre a região de impacto definida pelo raio combinado dos objetos. Essa abordagem permite incorporar a estrutura dinâmica da nuvem na matriz de covariância, mantendo compatibilidade com formulações operacionais estabelecidas.

6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação do HCPM baseia-se na geração, propagação e caracterização estatística de uma nuvem de detritos, seguida do cálculo da probabilidade de colisão. A nuvem é representada por N fragmentos obtidos por perturbações em um estado orbital nominal:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_0 - \Delta\mathbf{X}_i \quad (16)$$

Os fragmentos são propagados independentemente por dinâmica kepleriana ao longo de 24 horas, resultando em uma distribuição tridimensional anisotrópica.

Final 3D Distribution of the Cloud

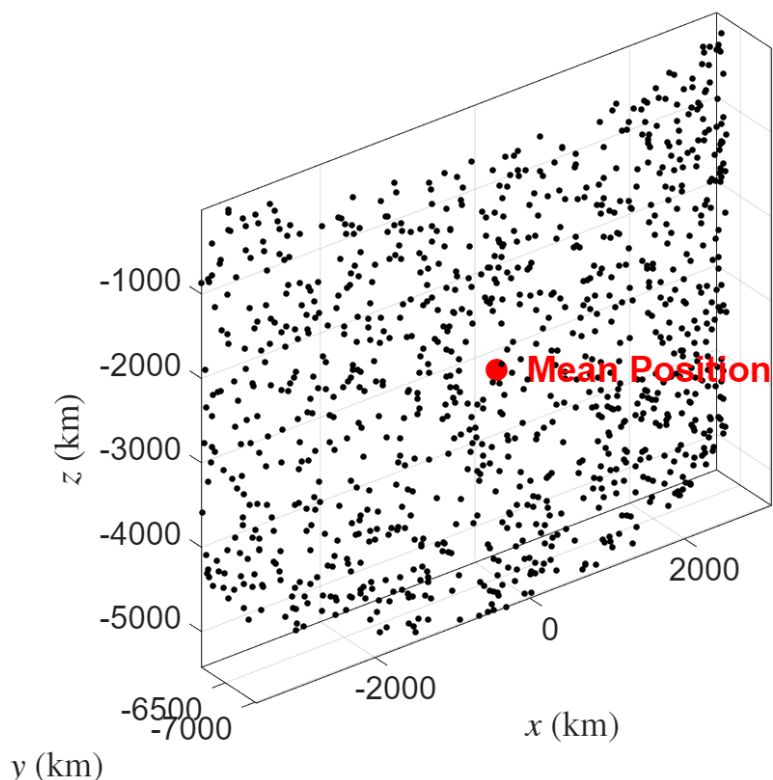


Figura 3 – Distribuição tridimensional final da nuvem de detritos simulada após 24 horas de propagação kepleriana.

A partir das posições propagadas, calculam-se a média e a matriz de covariância, que descrevem a dispersão da nuvem.

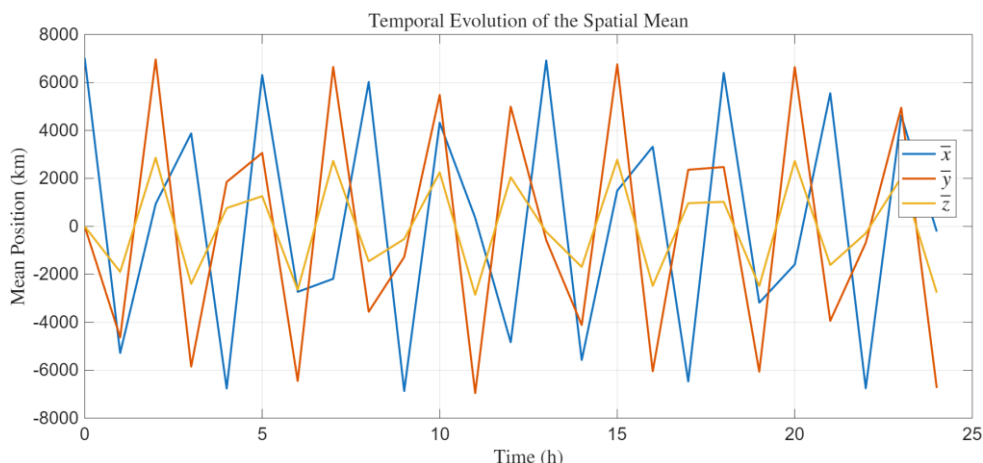


Figura 4 – Evolução temporal das médias espaciais da nuvem. Observam-se um comportamento orbital periódico e uma dispersão anisotrópica.

A probabilidade de colisão é avaliada no plano de conjunção utilizando a formulação de Foster com refinamento de Akella e Alfriend. A integral é resolvida numericamente por discretização polar.

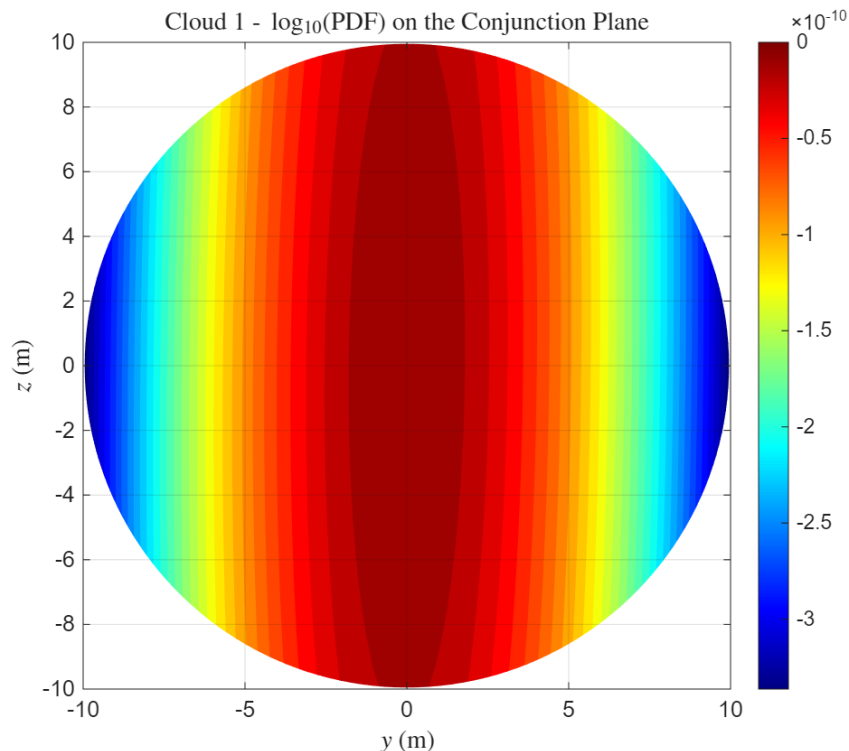


Figura 5 – Mapa de densidade de probabilidade logarítmica $\log_{10}(\text{PDF})$ no plano de conjunção YZ. A nuvem de detritos é primeiro centralizada subtraindo-se a posição final média antes do cálculo da covariância projetada, garantindo que os contornos reflitam apenas a dispersão estatística relevante para a formulação de Foster/Akella.

A abordagem preserva a consistência com a formulação analítica, permitindo o tratamento de distribuições anisotrópicas com estabilidade numérica. O custo computacional depende do número de fragmentos e da resolução da integração.

7 DISCUSSÃO

Os resultados obtidos com o HCPM evidenciam a relevância da integração entre dinâmica orbital e modelagem estatística na avaliação do risco de colisão. A distribuição espacial dos fragmentos, obtida por propagação kepleriana, preserva características físicas essenciais, como anisotropia e variações de densidade, observadas nas Figuras 3, 4 e 5. Esse comportamento é consistente com análises clássicas de nuvens de detritos, nas quais a dinâmica orbital conduz naturalmente a distribuições não uniformes [4, 5].

Nesse contexto, a aproximação gaussiana no plano de conjunção deve ser interpretada como uma representação local da distribuição propagada, permitindo a aplicação das formulações de Foster [7] e Akella e Alfriend [8] sem perda de consistência física. Diferentemente de abordagens puramente estatísticas, a estrutura de covariância utilizada no HCPM é derivada diretamente da dinâmica, reduzindo inconsistências associadas a hipóteses simplificadoras.

Essa integração permite representar de forma mais realista cenários pós-fragmentação e ambientes densos, como aqueles associados a mega constelações [16], nos quais distribuições anisotrópicas são predominantes. Além disso, evita erros decorrentes da má representação da incerteza orbital, apontados em estudos recentes [9].

Como limitação, o modelo demanda maior esforço computacional devido à propagação explícita dos fragmentos. Nesse sentido, extensões futuras podem explorar estratégias híbridas que combinem modelagem dinâmica e técnicas baseadas em dados [18, 20], visando maior eficiência sem perda de fidelidade física.

Assim, o HCPM estabelece uma conexão direta entre mecânica orbital e inferência probabilística, oferecendo uma abordagem consistente para avaliação de risco em cenários orbitais complexos.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho apresentou o Modelo Híbrido de Probabilidade de Colisão (HCPM), que integra a dinâmica orbital de nuvens de detritos com a formulação estatística no plano de conjunção. A abordagem combina o modelo de Formiga et al. [10] com as formulações de Foster [7] e Akella e Alfriend [8], permitindo estimativas de probabilidade mais consistentes com a física de cenários pós-fragmentação.

Os resultados mostram que a covariância obtida a partir da propagação dinâmica preserva anisotropias naturais da nuvem, produzindo campos de probabilidade mais representativos do comportamento orbital. Além disso, o

modelo mantém compatibilidade com estruturas operacionais existentes, possibilitando sua aplicação em sistemas de monitoramento de conjunção.

Como limitação, destaca-se o custo computacional associado à propagação de múltiplos fragmentos e à avaliação numérica da probabilidade. Nesse contexto, extensões futuras podem explorar a integração com técnicas baseadas em dados para acelerar a inferência, bem como a inclusão de perturbações mais complexas e cenários com múltiplos eventos de fragmentação.

Assim, o HCPM estabelece uma conexão consistente entre mecânica orbital e inferência probabilística, configurando uma abordagem promissora para avaliação de risco em ambientes orbitais cada vez mais densos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apoiado pela Coordenação para o Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (CAPES).

Os autores desejam expressar sua gratidão pelo apoio fornecido pelas bolsas 2022/13228-9, 2023/01391-5 e 2023/13984-0 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

REFERÊNCIAS

- [1] E. S. Agency, Esa annual space environment report 2025, Tech. Rep. GEN-DB-LOG-00288-OPS-SD, ESA Space Debris Office (2025).
- [2] N. Dennis, Probabilistic theory and statistical distribution of earth satellites., *Journal of the British Interplanetary Society* 25 (1972) 333–376.
- [3] D. J. Kessler, Derivation of the collision probability between orbiting objects: The lifetimes of jupiter’s outer moons, *Icarus* 48 (1) (1981) 39–48.
- [4] W. B. Heard, Dispersion of ensembles of non interacting particles, *Astrophysics and Space Science* 43 (1) (1976) 63–82.
- [5] K. R. Housen, The short-term evolution of orbital debris clouds, *Journal of the Astronautical Sciences* 40 (2) (1992) 203–213.
- [6] D. J. Kessler, B. G. Cour-Palais, Collision Frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt, *Journal of Geophysical Research* 83 (A6) (1978) 2637–2646.9
- [7] J. L. Foster, H. J. Estes, A parametric analysis of orbital debris collision probability and maneuver rate for space vehicles, Technical Memorandum JSC-25898, NASA Johnson Space Center (1992).
- [8] M. R. Akella, K. T. Alfriend, Probability of collision between space objects, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23 (5) (2000) 769–772. doi:10.2514/2.4611.
- [9] M. Hejduk, D. Snow, Setting the bar for the replacement of the probability of collision metric, in: 29th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD), 2024.
- [10] J. K. S. Formiga, D. P. S. d. Santos, F. A. Fiore, R. V. de Moraes, A. F. B. A. Prado, Study of collision probability considering a non-uniform cloud of space debris, *Computational and Applied Mathematics* 39 (1) (2020) 21.
- [11] F. Letizia, C. Colombo, H. G. Lewis, Analytical model for the propagation of small-debris-object clouds after fragmentations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 38 (8) (2015) 1478–1491.

- [12] E. M. Polli, J. L. Gonzalo, C. Colombo, Analytical model for collision probability assessments with large satellite constellations, *Advances in Space Research* 72 (7) (2023) 2515–2534.
- [13] F. J. Krage, Nasa spacecraft conjunction assessment and collision avoidance best practices handbook, Tech. rep. (2023).
- [14] Y. Sztamfater-Garcia, M. Sanjurjo-Rivo, G. Escribano, H. Molina-Bulla, J. Miguez, An approximate model for the computation of in-orbit collision probabilities using importance sampling, *Advances in Space Research* 75 (4) (2025) 3791–3805.
- [15] D. S. McKnight, F. R. Di Pentino, New insights on the orbital debris collision hazard at geo, *Acta Astronautica* 85 (2013) 73–82.
- [16] C. Pardini, L. Anselmo, Environmental Sustainability of large satellite constellations in low earth orbit, *Acta Astronautica* 170 (2020) 27–36.
- [17] A. Jenkin, B. Hansen, M. Sorge, G. Peterson, Fengyun-1c orbital debris cloud short-term risk analysis, in: *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, p. 6266.
- [18] A. Morselli, R. Armellin, P. Di Lizia, F. B. Zazzera, A high order method for orbital conjunctions analysis: Sensitivity to initial uncertainties, *Advances in Space Research* 53 (3) (2014) 490–508.
- [19] D. T. Hall, S. J. Casali, L. C. Johnson, B. B. Skrehart, L. G. Baars, High fidelity collision probabilities estimated using brute force monte carlo simulations, in: *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, no. GSFC-E-DAA-TN58551, 2018.
- [20] J. S. Catulo, C. Soares, M. Guimarães, Predicting the probability of collision of a satellite with space debris: A bayesiana machine learning approach, arXiv preprint arXiv:2311.10633 (2023).